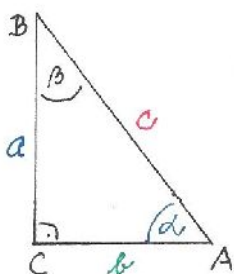


E) GONIOMETRIE

1. Goniometrické funkce ostřího úhlu

- PRAVOÚHLÝ TROJÚHELNÍK (budeme značit RA)



c ... přímka
 a, b ... odvěsny

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \left(\frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přímka}} \right)$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} \quad \left(\frac{\text{přilehlá odvěsna}}{\text{přímka}} \right)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} \quad \left(\frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přilehlá odvěsna}} \right)$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{b}{a} \quad \left(\frac{\text{přilehlá odvěsna}}{\text{protilehlá odvěsna}} \right)$$

- při řešení RA (tj. dopočítání zbývajících stran a úhlů) využíváme

- PYTHAGOROVU VĚTU $c^2 = a^2 + b^2$

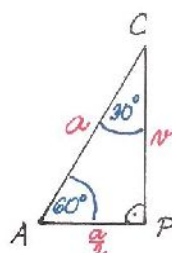
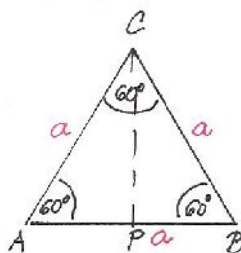
- součet úhlů v RA $\alpha + \beta = 90^\circ$

(v obec. Δ : $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$; v RA : $\gamma = 90^\circ \rightarrow RA$)

Příklady

① Odvození hodnoty goniometrických funkcí pro $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$.

a) v ROVNOSTRANNÉM Δ : $30^\circ, 60^\circ$



N. P. N. $a^2 = v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$v^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$

$v^2 = \frac{3a^2}{4}$

$v = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ [$-\frac{a\sqrt{3}}{2}$ nepřijímáme]

$$\sin 30^\circ = \left(\frac{\frac{a}{2}}{a} \right) = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{v}{a} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{v} = \left(\frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \right) = \frac{a/2}{a\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{cotg} 30^\circ = \frac{v}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{a\sqrt{3} \cdot 2}{2a} = \sqrt{3}$$

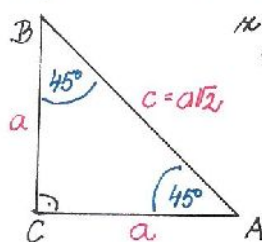
$$\sin 60^\circ = \frac{v}{a} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} (= \cos 30^\circ)$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2} (= \sin 30^\circ)$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{v}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3} (= \operatorname{cotg} 30^\circ)$$

$$\operatorname{cotg} 60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{v} = \dots = \frac{1}{\sqrt{3}} (= \operatorname{tg} 30^\circ)$$

b) v PRAVOÚHLÉM ROVNORAMENNÉM Δ : 45°



N. P. N. $c^2 = a^2 + a^2$
 $c^2 = 2a^2$
 $c = a\sqrt{2}$

$$\sin 45^\circ = \frac{a}{c} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{a}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{a}{a} = 1$$

$$\operatorname{cotg} 45^\circ = \frac{a}{a} = 1$$

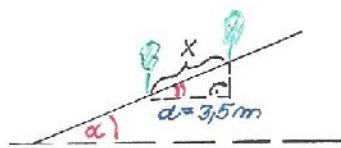
HODNOTY GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ

! UHĚT ZPAKĚTI !

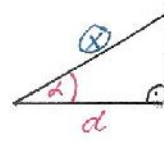
BUDOU DALŠÍ !

	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

- ② Jak daleko musíme kopat jámy pro stromky v dané vzdálenosti průměru na svahu se sklonem $\alpha = 25^\circ$, aby vzdálenost byla 3,5 m.



$$\begin{aligned} \alpha &= 25^\circ \\ d &= 3,5 \text{ m} \\ x &= ? \text{ m} \end{aligned}$$



[přiležitá odz. $\Rightarrow \cos \alpha$]

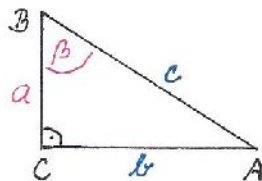
$$\cos \alpha = \frac{d}{x} \quad | \cdot x$$

$$x \cos \alpha = d$$

$$x = \frac{d}{\cos \alpha} = \frac{3,5 \text{ m}}{\cos 25^\circ}$$

$$x = 3,9 \text{ m}$$

- ③ $R \triangle ABC$: $a = 7 \text{ cm}$, $\operatorname{ctg} \beta = \frac{5}{7}$. Účtu vyznačující strany. ($| \angle C | = 90^\circ$)



$$\begin{aligned} a &= 7 \text{ cm} \\ \operatorname{ctg} \beta &= \frac{5}{7} \\ b &= ? \text{ cm} \\ c &= ? \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{a}{b} \quad | \cdot b$$

$$b \operatorname{ctg} \beta = a$$

$$b = \frac{a}{\operatorname{ctg} \beta}$$

$$b = \frac{7}{\frac{5}{7}} = \frac{49}{5}$$

$$b = 9,8 \text{ cm}$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

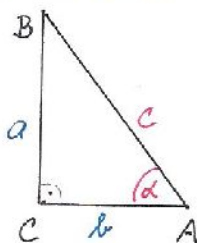
$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$c = \sqrt{7^2 + 9,8^2}$$

$$c = 12,6 \text{ cm}$$

[LZE I JINAK]

- ④ $R \triangle ABC$ ($| \angle C | = 90^\circ$): $c = 10 \text{ cm}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$. Účtu a b.



$$c = 10 \text{ cm}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$$

$$a = ? \text{ cm}$$

$$b = ? \text{ cm}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \alpha = 36,87^\circ (= 36^\circ 52' 12'')$$

$$\textcircled{a} \sin \alpha = \frac{a}{c} \quad | \cdot c$$

$$c \sin \alpha = a$$

$$a = 10 \cdot \sin 36,87^\circ$$

$$a = 6 \text{ cm}$$

[LZE I JINAK]

$$\textcircled{b} c^2 = a^2 + b^2$$

$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{100 - 36}$$

$$b = 8 \text{ cm}$$

DALŠÍ PŘÍKLADY - ⑦ TRIGONOMETRIE (další kapitola)